Dr. P. Thurnheer ETH Zürich Herbst 2004

2. Vordiplom
Mathematik III: Analysis
(D-ERDW)

Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen in den 90 Minuten, welche für diesen Prüfungsteil vorgesehen sind.
Beachten Sie, dass die einzelnen Teilaufgaben innerhalb einer Aufgabe weitgehend unabhängig voneinander gelöst werden können.

1. (9 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}$.

a) Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion f auf dem Gebiet $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 49\}$ und klassifizieren Sie diese mit Hilfe der Hessematrix.

b) Bestimmen Sie die Richtung in der die Richtungsableitung von f im Punkt $P(\frac{\pi}{2}, 2)$ minimal ist. Geben Sie diesen Minimalwert an.

2. (9 Punkte)
Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2 \ln t$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(u, v) = 1 + 2u + v$. Sei $h(x) = g(f(x), x)$.

a) Beschreiben Sie die Niveaulinien der Funktion g.

b) Bestimmen Sie $Dg(u, v)$.

c) Bestimmen Sie $h'(x)$ direkt und mit Hilfe der Kettenregel.

d) Geben Sie unter Verwendung der Linearisierungsformel eine erste Näherung für den Wert $h(1.1)$.

Bitte wenden!

3. (11 Punkte)
Das Bild der Funktion $f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x}{y}$ sei die Fläche $\mathcal{F}$.

a) Bestimmen Sie einen Normalenvektor n auf die Fläche $\mathcal{F}$ im Punkt $P(8, 2, f(8,2))$, indem Sie $\mathcal{F}$ als Niveaufläche einer geeigneten Funktion g interpretieren.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung von $\mathcal{F}$ (setzen Sie $z = u$, $y = v$) und bestimmen Sie den in Aufgabe 3a) beschriebenen Normalenvektor n mit Hilfe von zwei geeigneten Tangentialvektoren an $\mathcal{F}$.

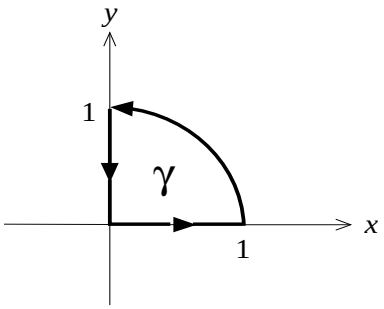
c) Beschreiben Sie die Tangentialebene an $\mathcal{F}$ im Punkt P
i) in Parameterdarstellung
ii) durch eine Koordinatengleichung.

4. (8 Punkte)

a) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x - xy \\ y \end{pmatrix}$$

längs des Weges γ.



b) Ist F ein Potentialfeld? Geben Sie zwei verschiedene Begründungen Ihrer Antwort.

Siehe nächstes Blatt!

5. (7 Punkte)
Bestimmen Sie eine Funktion $f(x,y)$ so, dass das Vektorfeld

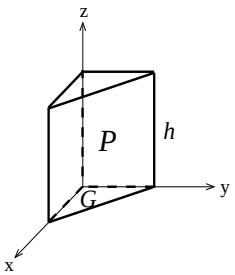
$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ \frac{1}{y^2 x} + \frac{x}{y} + 1 \end{pmatrix}.$$

wirbelfrei ist.
Geben Sie dann ein Teilgebiet von $\mathbb{R}^2$ an, auf dem F ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie eine Potentialfunktion.

6. (8 Punkte)
Wir betrachten das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2xyz \end{pmatrix}$$

und das gerade Prisma P mit der Grundfläche
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ z = 0\}$ und der Höhe $h = 3$.



a) Berechnen Sie den Fluss von F durch die Oberfläche von P mit Hilfe des Satzes von Gauss.

b) Wie gross ist der Fluss von F durch eine der Seitenflächen von P? Begründen Sie Ihre Antwort rein geometrisch.

c) Berechnen Sie den Fluss von F durch die Oberfläche von P nun direkt, d.h. unter Verwendung der Definition des Flusses.